Erinnerung:

Sei K ein Unterkörper eines Körpers L. Für jeden K-Vektorraum V existiert genau eine Struktur als L-Vektorraum auf $V \otimes_K L$, deren additive Gruppe die von $V \otimes_K L$ ist und für die gilt:

$$\forall x, y \in L \ \forall v \in V : x \cdot (v \otimes y) = v \otimes xy.$$

Definition: Der L-Vektorraum $V_L := V \otimes_K L$ heisst die *Basiserweiterung von* V *bezüglich* $K \subset L$.

Definition: Im Fall $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ heisst $V_{\mathbb{C}}$ die *Komplexifizierung* des reellen Vektorraums V.

Definition: Der *komplex Konjugierte* eines $\mathbb{C}$-Vektorraums $(W, +, \cdot\,, 0_W)$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum $(W, +, \bar{\cdot}\,, 0_W)$, bei dem die skalare Multiplikation $\cdot$ ersetzt wurde durch

$$\bar{\cdot}\, : \ \mathbb{C} \times W \to W, \ (z, w) \mapsto \boxed{z \,\bar{\cdot}\, w := \bar{z} \cdot w.}$$

So wie wir üblicherweise $(W, +, \cdot\,, 0_W)$ mit W abkürzen, schreiben wir für $(W, +, \bar{\cdot}\,, 0_W)$ nur kurz $\overline{W}$.

Beispiel: Für jeden $\mathbb{C}$-Unterraum $W \subset \mathbb{C}^n$ existiert ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\overline{W} \xrightarrow{\sim} \{\overline{w} \mid w \in W\} \subset \mathbb{C}^n, \quad w \mapsto \overline{w}.$$

$$\underbrace{z \,\bar{\cdot}\, w}_{=\ \bar{z} \cdot w} \longmapsto z \cdot \overline{w}$$

$$\bar{z} \cdot w \longmapsto \overline{(\bar{z} w)} = z \cdot \overline{w}$$

Proposition: (Vergleiche §10.12 und §11.5.) Für jeden endlich-dimensionalen unitären Vektorraum W existiert ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\delta\colon \overline{W} \xrightarrow{\sim} W^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,\mathbb{C}), \quad v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot\, \rangle.$$

<u>Bew</u>: $\forall v,w\in W\ \forall z\in\mathbb{C}$: $\delta(zv)(w) = \langle zv, w\rangle = \bar{z}\cdot\langle v,w\rangle = (\bar{z}\cdot\delta(v))(w)$

$\Rightarrow \delta(zv) = \bar{z}\cdot\delta(v)$ — Rest wie in §10.12

$\Rightarrow \delta(z \mathbin{\bar{\cdot}} v) = \delta(\bar{z}\cdot v) = z\cdot\delta(v)$. $\Rightarrow \delta$ $\mathbb{C}$-linear.

ged.

Proposition: Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W existiert ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\varphi\colon W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} W \boxplus \overline{W}, \quad w \otimes z \mapsto (z\cdot w, z \mathbin{\bar{\cdot}} w).$$

<u>Bew</u>: $W\times\mathbb{C} \to W\boxplus\overline{W}$, $(w,z)\mapsto(zw, z\mathbin{\bar{\cdot}} w)$ nach Def. $\mathbb{R}$-bilinear.

$\overset{\text{UE}}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ $\mathbb{R}$-lineare Abb $\varphi\colon W\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to W\boxplus\overline{W}$ wie oben.

Die ist $\mathbb{C}$-linear:

$\forall \gamma\in\mathbb{C}$: $\varphi(\gamma\cdot(w_i\otimes z_i)) = \varphi(w_i\otimes\gamma z_i) = (\gamma z_i w_i, (\gamma z_i)\mathbin{\bar{\cdot}} w_i) = \gamma\cdot(z_i w_i, z_i\mathbin{\bar{\cdot}} w_i)$

Nimm $\sum_i$ $\Rightarrow$ $\varphi(\gamma t) = \gamma\varphi(t)$ für alle $t\in W\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

B Basis von W über $\mathbb{C}$

$\{b, ib \mid b\in B\}$ Basis von W über $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \{b\otimes 1, ib\otimes 1 \mid b\in B\}$ Basis von $W\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$.

$\varphi(b\otimes 1) = (b,b)$

$\varphi(ib\otimes 1) = (ib, -ib) = i(b,-b)$

$\{(b,b),\ i(b,-b) \mid b \in B\}$ Basis von $W \oplus \overline{W}$ über $\mathbb{C}$.
$\Rightarrow$ Isomorphismus. qed.

12.5 Höhere Tensorprodukte

Seien $V_1, V_2, \ldots$ Vektorräume über K.

Proposition: Es existieren eindeutige Isomorphismen, charakterisiert wie folgt:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(a)} & V_1 \otimes_K K \xrightarrow{\sim} V_1 & \text{mit} \quad v_1 \otimes 1 \mapsto v_1 & \text{(Identität)} \\
\text{(b)} & V_1 \otimes_K V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes_K V_1 & \text{mit} \quad v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1 & \text{(Kommutativität)} \\
\text{(c)} & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \text{mit} \quad (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) & \text{(Assoziativität)}
\end{array}
$$

Bew.: (a): $V_1 \times K \to V_1$, $(v_1, x) \mapsto x v_1$ bilinear $\overset{UE}{\Rightarrow} \exists!$ linear $V_1 \otimes_K K \to V_1$ mit $\underset{= x\cdot(v_1 \otimes 1)}{v_1 \otimes x} \mapsto x v_1$.

B Basis von $V_1 \Rightarrow \{b \otimes 1 \mid b \in B\}$ Basis von $V_1 \otimes_K K$. ; $b \otimes 1 \mapsto b$. $\Rightarrow$ Iso.

(b) $V_1 \times V_2 \to V_2 \otimes_K V_1$, $(v_1, v_2) \mapsto v_2 \otimes v_1$ bilinear $\overset{UE}{\Rightarrow} \exists!$ lin φ $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ wie oben.

B_i Basis von V_i $\Rightarrow$ $\{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ Basis von $V_1 \otimes V_2$
bijektiv! φ $\{b_2 \otimes b_1 \mid \ldots\}$ — " — $V_2 \otimes V_1$ $\Bigg\} \Rightarrow$ Iso.

qed.

(c) analog.

Damit lässt sich das Tensorprodukt einer beliebigen endlichen Folge von Vektorräumen $V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r$ ohne Klammern definieren. Dieses trägt eine natürliche multilineare Abbildung

$$\kappa\colon V_1 \times \ldots \times V_r \to V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r,\ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_r.$$

Zusammen haben diese die *universelle Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum W und jede multilineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_r \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & W \\
& V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposition:

$$\dim_K(V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_r) \;=\; \prod_{i=1}^{r} \dim_K(V_i).$$

Bew.: $r=2$ ✓ Induktion über r. qed.

Definition: Für jede natürliche Zahl r ist die *r-te Tensorpotenz von V* definiert durch $\boxed{V^{\otimes 0} := K}$ beziehungsweise $V^{\otimes r} := V \otimes_K \ldots \otimes_K V$ mit r Faktoren für $r \geqslant 1$.

$\boxed{V^{\otimes 1} = V}$

Definition: Der Raum $T^{r,s}(V) := V^{\otimes r} \otimes_K (V^\vee)^{\otimes s}$ heisst der Raum der *r-fach kovarianten und s-fach kontravarianten Tensoren*, oder kurz der *Tensoren vom Typ (r, s)*. (Nach einer anderen Konvention nennt man sie *vom Typ (s, r)*.)

Bemerkung: Ist $\dim_K(V) < \infty$, so liefert jede Basis von V die zugehörige duale Basis von $V^\vee$ und somit eine Basis von $T^{r,s}(V)$. Insbesondere ist dann

$$\boxed{\dim_K T^{r,s}(V) \;=\; (\dim_K V)^{r+s}.}$$

Bemerkung: Je nach Situation kann eine $n \times n$-Matrix einen Tensor vom Typ $(0, 2)$ oder $(1, 1)$ oder $(2, 0)$ darstellen für den Raum $V = K^n$. Für jeden dieser Typen wird der Basiswechsel mit einer Basiswechselmatrix U durch eine andere Formel beschrieben, nämlich durch $A \mapsto U^TAU$ bzw. $U^{-1}AU$ bzw. $U^{-1}A\,(U^T)^{-1}$. Eine Verwirrung vermeidet man am besten, indem man so lange wie möglich bei den abstrakten Begriffen bleibt, wo V und $V^\vee$ durch die Notation klar unterschieden werden.

$(0,2)$ $(1,1)$ $(2,0)$

$\dim(V) = n$

$(r,s) = (0,0)$	K	Skalar
$(r,s) = (1,0)$	V	Spaltenvektor
$(r,s) = (0,1)$	$V^\vee$	Zeilenvektor
$(r,s) = (2,0)$	$V \otimes V$	$n \times n$-Matrix
$(r,s) = (1,1)$	$V \otimes V^\vee \cong \mathrm{Hom}(V,V)$	
$(r,s) = (0,2)$	$V^\vee \otimes V^\vee \cong \mathrm{Mult}(V,V;K)$	

Proposition: Für jeden eindimensionalen K-Vektorraum V existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\boxed{V^\vee \otimes_K V \xrightarrow{\sim} K \qquad \text{mit} \qquad \ell \otimes v \mapsto \ell(v).}$$

$\lambda \in K^\times$

$\Rightarrow \{\lambda b\}$ hat duale Basis $\{\frac{1}{\lambda} \cdot \ell\}$

Bew.: $V^\vee \times V \to K$, $(\ell, v) \mapsto \ell(v)$ bilinear

UE $\Rightarrow \exists!$ lineare Abb.

$V^\vee \otimes V \to K$ mit $\ell \otimes v \mapsto \ell(v)$.

$\{b\}$ Basis von V

$\{\ell\}$ duale Basis von $V^\vee$

$\Rightarrow \{\ell \otimes b\}$ Basis von $V^\vee \otimes V$

$\ell \otimes b \mapsto \ell(b) = 1$ $\Rightarrow$ Iso. qed.

Beispiel: Jede skalare physikalische Grösse liegt in einem gewissen eindimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Wahl einer Grundeinheit entspricht der Wahl eines Basisvektors. Nur physikalische Grössen derselben Art, also Elemente desselben Vektorraums, sind miteinander vergleichbar. Beispiele:

Grösse	Vektorraum	Grundeinheit	Relation
Zeit	T	Sekunde, Stunde	$h = 3600s$
Länge	L	Meter, Zoll	$in = 0.0254m$
Masse	M	Kilogramm, Pfund	$lb = 0.45359237kg$

Zusammengesetzte skalare physikalische Grössen liegen auf natürliche Weise in gewissen Tensorräumen. Beispiele:

skalare Grösse	Vektorraum	Grundeinheit
Flächeninhalt	$L^{\otimes 2}$	m^2
Frequenz	$T^\vee$	$1/s$
Geschwindigkeit	$L \otimes T^\vee$	m/s
Beschleunigung	$L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$	m/s^2
Kraft	$M \otimes L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$	$N = kg\, m/s^2$
Energie	$M \otimes L^{\otimes 2} \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$	$J = kg\, m^2/s^2$

Klassische vektorielle physikalische Grössen liegen in euklidischen Vektorräumen. Zum Beispiel sei R der dreidimensionale Ortsraum. Einige weitere Grössen sind dann:

vektorielle Grösse	Vektorraum
Geschwindigkeit	$R \otimes T^\vee$
Beschleunigung	$R \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$
Impuls	$M \otimes R \otimes T^\vee$
Kraft	$M \otimes R \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$
Spannung	$M \otimes L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2} \otimes (R^\vee)^{\otimes 2}$

$\frac{kg \cdot m}{s^2 m^2}$

Vergleiche dazu auch den Beitrag von Terence Tao:

`http://terrytao.wordpress.com/2012/12/29/a-mathematical-formalisation-of-dimensional-analysis`

Quantenmechanische physikalische Zustände liegen in unitären Vektorräumen, die oft einen weniger direkten Zusammenhang mit dem klassischen Ortsraum haben.